數學傳播 49卷4期, pp. 105-113

給定一股求本原畢氏三元數的簡易方法

張進安

一、前言

畢氏定理是平面幾何的一個重要定理, 畢氏三元數卻是整數論中的一個重要課題。自古以來, 尋找本原畢氏三元數幾乎都用間接代入的方法, 例如: 用 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$, 其中 $m>n$, 爲兩互質且一奇一偶的正整數, 即可求得一組本原畢氏三元數 (a,b,c); 或者令 $a=2k+1$, $b=2k^2+2k$, $c=2k^2+2k+1$ 也可求得一組本原的畢氏三元數 (a,b,c); 或者令 $a=2k$, $b=k^2-1$, $c=k^2+1$ 也可求得一組本原畢氏三元數 (a,b,c)。無論哪一種代入公式, 總是覺得不夠直接, 因爲必須先尋找適當的參數, 才能找到一組本原畢氏三元數。本文將試著用簡單的代數方法和數論原理, 直接對指定的 a 建構所有的畢氏三元數和本原畢氏三元數。例如令 $a=60$, 我們如果能直接從 60 的質因數分解 $2^2\times 3\times 5$ 就知道 $(60,b,c)$ 的畢氏三元數有 13 組, 且其中只有 4 組是本原畢氏三元數, 是多麼令人振奮的事啊!

二、基本理論

依常用習慣, 當 (a,b,c) 爲一組畢氏三元數, 即表示 $a,b,c\in N$ 且 $a^2+b^2=c^2$, 當 a,b 互質時, (a,b,c) 爲一組本原畢氏三元數。這裡我們不分 a,b 誰大誰小, 理由將在文中說明。

對指定的 a 而言, 若 (a,b,c) 爲一組畢氏三元數, 因爲 $a^2+b^2=c^2$, 所以 $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$, 因爲 $(c-b)\geq 1$, 且 $(c-b)<(c+b)$, 且 $(c-b)$ 和 $(c+b)$ 兩數永遠同奇偶, 所以 當 a 爲奇數時, a^2 亦爲奇數, 將 a^2 分解爲 x、y 兩個奇數因子, 且 $x<y$, 令 $c-b=x$, $c+b=y$, 聯立解出 $b=\frac{y-x}{2}$, $c=\frac{y+x}{2}$, 則 $(a,\frac{y-x}{2},\frac{y+x}{2})$ 即爲一組畢氏三元數; 當 a 爲偶數時, a^2 亦爲偶數, 將 a^2 分解爲 x、y 兩個偶數因子, 且 $x<y$, 則 $(a,\frac{y-x}{2},\frac{y+x}{2})$ 即爲一組畢氏三元數。以下將由 $a=1$ 觀察到 $a=20$, 希望能歸納出 a 的質因數分解和畢氏三元數之間的關係。

三、觀察過程

1. $a=1$, $1^2=1$, 顯然無法分解爲 x、y 兩個一小一大的奇數因子, 因此 $(1,b,c)$ 不存在畢氏三元數。

2. $a=2$, $2^2=4$, 顯然無法分解爲 x、y 兩個一小一大的偶數因子, 因此 $(2,b,c)$ 不存在畢氏三元數。

3. $a=3$, $3^2=9=1\times 9$, 所以 $(3,\frac{9-1}{2},\frac{9+1}{2})=(3,4,5)$ 爲一組畢氏三元數且爲本原畢氏三元數。

4. $a=4$, $4^2=16=2\times 8$, 所以 $(4,\frac{8-2}{2},\frac{8+2}{2})=(4,3,5)$ 爲一組畢氏三元數且爲本原畢氏三元數。顯然 (3, 4, 5) 和 (4, 3, 5) 是同一組本原畢氏三元數, 但我們保留其相異性, 因爲 (3, 4, 5) 是由 $a=3$ 建構而來, 而 (4, 3, 5) 是由 $a=4$ 建構而來。

5. $a=5$, $5^2=25=1\times 25$, 所以 $(5,\frac{25-1}{2},\frac{25+1}{2})=(5,12,13)$ 爲一組畢氏三元數且爲本原畢氏三元數。

6. $a=6$, $6^2=36=2\times 18$ (注意 3×12 及 4×9 都是奇偶不同), 所以 $(6,\frac{18-2}{2},\frac{18+2}{2})=(6,8,10)=2(3,4,5)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

7. $a=7$, $7^2=49=1\times 49$, 所以 $(7,\frac{49-1}{2},\frac{49+1}{2})=(7,24,25)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數。

8. $a=8$, $8^2=64=2\times 32=4\times 16$, 所以 $(8,\frac{32-2}{2},\frac{32+2}{2})=(8,15,17)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數; 但 $(8,\frac{16-4}{2},\frac{16+4}{2})=(8,6,10)=2(4,3,5)$ 只是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

9. $a=9$, $9^2=81=1\times 81=3\times 27$, 所以 $(9,\frac{81-1}{2},\frac{81+1}{2})=(9,40,41)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數。但 $(9,\frac{27-3}{2},\frac{27+3}{2})=(9,12,15)=3(3,4,5)$ 只是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

10. $a=10$, $10^2=100=2\times 50$ (注意 4×25 及 5×20 都是奇偶不同), 所以 $(10,\frac{50-2}{2},\frac{50+2}{2})=(10,24,26)=2(5,12,13)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

11. $a=11$, $11^2=121=1\times 121$, 所以 $(11,\frac{121-1}{2},\frac{121+1}{2})=(11,60,61)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數。

12. $a=12$, $12^2=144=2\times 72=4\times 36=6\times 24=8\times 18$ (注意 3×48 及 9×16 都是奇偶不同) 所以 $(12,\frac{72-2}{2},\frac{72+2}{2})=(12,35,37)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數; $(12,\frac{36-4}{2},\frac{36+4}{2})=(12,16,20)=4(3,4,5)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(12,\frac{24-6}{2},\frac{24+6}{2})=(12,9,15)=3(4,3,5)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(12,\frac{18-8}{2},\frac{18+8}{2})=(12,5,13)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數。在這裡我們發現, 12 是第一個能建構出 (12, 35, 37) 及 (12, 5, 13) 兩組本原畢氏三元數的 a。

13. $a=13$, 顯然應該和 $a=3$、$a=5$、$a=7$、$a=11$ 等奇質數一樣, 得到 $(a,\frac{a^2-1}{2},\frac{a^2+1}{2})=(13,84,85)$ 爲一組畢氏三元數且爲本原畢氏三元數。

14. $a=14$, $14^2=196=2\times 98$ (注意 4×49 及 7×28 都是奇偶不同), 所以 $(14,\frac{98-2}{2},\frac{98+2}{2})$

$= (14, 48, 50) = 2(7, 24, 25)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

15. $a = 15$, $15^2 = 225 = 1 \times 225 = 3 \times 75 = 5 \times 45 = 9 \times 25$, 所以 $(15, \frac{225-1}{2}, \frac{225+1}{2}) = (15, 112, 113)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數; $(15, \frac{75-3}{2}, \frac{75+3}{2}) = (15, 36, 39) = 3(5, 12, 13)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(15, \frac{45-5}{2}, \frac{45+5}{2}) = (15, 20, 25) = 5(3, 4, 5)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(15, \frac{25-9}{2}, \frac{25+9}{2}) = (15, 8, 17)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數。在這裡我們發現, 15 是第二個能建構出兩組本原畢氏三元數的 a。

16. $a = 16$, $16^2 = 256 = 2 \times 128 = 4 \times 64 = 8 \times 32$, 所以 $(16, \frac{128-2}{2}, \frac{128+2}{2}) = (16, 63, 65)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數; $(16, \frac{64-4}{2}, \frac{64+4}{2}) = (16, 30, 34) = 2(8, 15, 17)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(16, \frac{32-8}{2}, \frac{32+8}{2}) = (16, 12, 20) = 4(4, 3, 5)$ 爲一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

17. $a = 17$, 顯然應該和 $a = 3$、$a = 5$、$a = 7$、$a = 11$、$a = 13$ 等奇質數一樣, 得到 $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}) = (17, 144, 145)$ 爲一組畢氏三元數且爲本原畢氏三元數。

18. $a = 18$, $18^2 = 324 = 2 \times 162 = 6 \times 54$, 所以 $(18, \frac{162-2}{2}, \frac{162+2}{2}) = (18, 80, 82) = 2(9, 40, 41)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(18, \frac{54-6}{2}, \frac{54+6}{2}) = (18, 24, 30) = 6(3, 4, 5)$ 是一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。

19. $a = 19$是奇質數, 所以 $(19, \frac{19^2-1}{2}, \frac{19^2+1}{2}) = (19, 180, 181)$ 爲一組畢氏三元數且爲本原畢氏三元數。

20. $a = 20$, $20^2 = 400 = 2 \times 200 = 4 \times 100 = 8 \times 50 = 10 \times 40$, 所以 $(20, \frac{200-2}{2}, \frac{200+2}{2}) = (20, 99, 101)$ 爲一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數; $(20, \frac{100-4}{2}, \frac{100+4}{2}) = (20, 48, 52) = 4(5, 12, 13)$ 爲一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數; $(20, \frac{50-8}{2}, \frac{50+8}{2}) = (20, 21, 29)$ 是一組畢氏三元數, 且爲本原畢氏三元數; $(20, \frac{40-10}{2}, \frac{40+10}{2}) = (20, 15, 25) = 5(4, 3, 5)$ 爲一組畢氏三元數, 但不是本原畢氏三元數。在這裡我們發現, 20 是第三個能建構出兩組本原畢氏三元數的 a。

四、歸納分析與簡單證明

1. 觀察 $a = 3$、5、9、7、11、13、17、19 $\cdots$, 當 a 爲奇質數, 因爲奇質數的 2 次方一定是奇數, 且只有一種 $1 \times a^2$ 的分解法, 所以只能建構一組畢氏三元數 $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2})$, 其中 $\frac{a^2-1}{2}$ 和 $\frac{a^2+1}{2}$ 必是連續正整數所以必互質, 所以爲本原畢氏三元數無誤。若 a 是奇質數 p 的 α (≥ 2) 次方, 仍然只有 $1 \times a^2$ 的分解法能建構出本原畢氏三元數 $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2})$, 而其他的 $p \times p^{2\alpha-1}, p^2 \times p^{2\alpha-2}, \ldots, p^{\alpha-1} \times p^{\alpha+1}$, 等分解法, 至少都有 p 的公因數, 所以無法建構本原畢氏三元數。

2. 觀察 $a = 2$、4 、8 、16 $\cdots$, 當 $a = 2^k$, $k = 1$ 時無法建構畢氏三元數; $k \geq 2$ 時恰能建構 $(k-1)$ 組畢氏三元數, 且其中必有一組本原畢氏三元數。即 $a^2 = 2^2k = 2 \times 2^{2k-1} = 2^2 \times 2^{2k-2} = \cdots = 2^{k-1} \times 2^{k+1}$ 共有 $k-1$ 組因數分解, 所以會有 $k-1$ 組畢氏三元數, 而其中只有第一組的 $2 \times 2^{2k-1}$ 可以建構出 $(2^k, \frac{2^{2k-1}-2}{2}, \frac{2^{2k-1}+2}{2}) = (2^k, 2^{2k-2}-1, 2^{2k-2}+1)$, 其後兩項爲相鄰的奇數, 所以必互質, 所以爲本原畢氏三元數無誤。其餘各組畢氏三元數都是偶數, 必不互質, 所以不是本原畢氏三元數。
3. 觀察 $a = 6$、10、14、18 $\cdots$, 都是奇數的 2 倍, 也都無法建構本原畢氏三元數。但其中稍有不同, 6、10、14 都是質數的 2 倍, 18 是質數平方的 2 倍, 所以在此多增加一個 $a = 30 = 2 \times 3 \times 5$ 來觀察:
   $30^2 = 900 = 2 \times 450 = 6 \times 150 = 10 \times 90 = 18 \times 50$ 依序可以得到:
   $(30, 224, 226) = 2(15, 112, 113)$,
   $(30, 72, 78) = 6(5, 12, 13)$,
   $(30, 40, 50) = 10(3, 4, 5)$,
   $(30, 16, 34) = 2(15, 8, 17)$,
   仍然無法建構本原畢氏三元數。所以我們可以歸納出一個較複雜的定理:

   若 a 的質因數分解中 2 的冪次爲 1, 則 (a,b,c) 建構的畢氏三元數都不是本原畢氏三元數。

   略證如下: 令 $a = 2\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, 其中 p_i 爲奇質數, 則

   $a^2 = 2^2 \times \prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i} = 2 \times 2\prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i}$, ……………………第一種分解法

   則 $b = \frac{2\prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i}-2}{2} = \prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i} - 1$, 爲偶數;

   $c = \frac{2\prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i}+2}{2} = \prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i} + 1$, 爲偶數; 因爲 $c - b = 2$,

   所以 $(a,b,c) = 2$, 因此 (a,b,c) 不是本原畢氏三元數。

   第二種分解法: $a^2 = 2p_1 \times 2p_1^{2\alpha_1-1}\prod_{i=2}^k p_i^{2\alpha_i}$,

   則 $b = \frac{2p_1^{2\alpha_1-1}\prod_{i=2}^k p_i^{2\alpha_i}-2p_1}{2} = p_1(p_1^{2\alpha_1-2}\prod_{i=2}^k p_i^{2\alpha_i} - 1)$,

   且 $c = p_1(p_1^{2\alpha_1-2}\prod_{i=2}^k p_i^{2\alpha_i} + 1)$。

   所以 a, b, c 至少有公因數 p_1, 因此 (a,b,c) 不是本原畢氏三元數。

   第三種分解法: $a^2 = 2p_r^{2\alpha_r} \times 2\prod_{i\neq r}^k p_i^{2\alpha_i}$,

   則 $b = \frac{2\prod_{i\neq r}^k p_i^{2\alpha_i}-2p_r^{2\alpha_r}}{2} = \prod_{i\neq r}^k p_i^{2\alpha_i} - p_r^{2\alpha_r}$, 爲一偶數;

   $c = \prod_{i\neq r}^k p_i^{2\alpha_i} + p_r^{2\alpha_r}$, 爲一偶數;

所以 (a,b,c) 至少有公因數2, 因此 (a,b,c) 不是本原畢氏三元數。

所以若 a 的質因數中只有一個 2, 則 (a,b,c) 建構的畢氏三元數都不是本原畢氏三元數。所以傳統教科書上說, 若 (a,b,c) 是本原畢氏三元數, 則 a、b 一定是一奇一偶的說法, 就不夠嚴謹, 應該修正爲 a、b 一定是一個奇數一個 4 的倍數。

4. 我們把目標轉移到能建構出兩組本原畢氏三元數的 $a=12$、15、20, 其中 $12=2^2\times 3$, $20=2^2\times 5$, 應該算是同一種質因數結構, 和 $15=3\times 5$ 的質因數結構不同, 但他們都可以建構出兩組本原畢氏三元數。爲了確定變因, 我們再觀察 $a=24=2^3\times 3$, 發現只有 $(24,143,145)$ 和 $(24,7,25)$ 兩組本原畢氏三元數, 而 $a=30=2\times 3\times 5$, 根據上述分析 3 的定理, 只有一個因數 2 反而沒有本原畢氏三元數。再觀察 $a=3\times 5\times 7=105$, 發現有 (105, 5512, 5513)、(105, 608, 617)、(105, 208, 233) 和 (105, 88, 137) 四組本原畢氏三元數。由此看來, 本原畢氏三元數的關鍵應該區分爲兩大類: 當 a 爲奇數時, 由奇質數的個數決定; 當 a 爲偶數時, 由 2 的次方和奇質數的個數決定。

先分析當 a 爲奇數時,

比較 $a=3\times 5$ 和 $a=3\times 5\times 7$ 建構的各組本原畢氏三元數來源:

$15^2=1\times 225=9\times 25$ 而得到 (15, 112, 113) 和 (15, 8, 17); $105^2=1\times 11025=9\times 1225=25\times 441=49\times 225$ 而得到 (105, 5512, 5513)、(105, 608, 617)、(105, 208, 233) 和 (105, 88, 137)。其餘各種分解, 都只是畢氏三元數而不是本原畢氏三元數, 我們可以發現:

當 $a^2=x\cdot y$, 而 (x,y) 互質時, $(a,\frac{y-x}{2},\frac{y+x}{2})$ 一定是本原畢氏三元數; 而 $(x,y)=d$ 不互質時, $(a,\frac{y-x}{2},\frac{y+x}{2})$ 至少有公因數 d, 所以不是本原畢氏三元數。當 $(x,y)=d$ 不互質, 不是本原畢氏三元數是顯而易見的; 但 (x,y) 互質時, 爲何是本原畢氏三元數, 必須證明一下:

當 $a=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$, $a^2=x\cdot y$ 時, 將每一個 $p_i^{2\alpha_i}$ 分別完整地投入 x 或投入 y 的分解, 則 (x,y) 互質, 將導致 a 和 $\frac{y-x}{2}$ 互質, 我們用反證法來證明: 假設 a 和 $\frac{y-x}{2}$ 不互質, 則存在公因數 p_r, 且 p_r是 a 的因數。則 p_r 只屬於 x 或屬於 y, 不失一般性的假設 p_r 屬於 x, 因爲 p_r 能整除 $\frac{y-x}{2}$, 所以 $\frac{y-x}{2}=p_r\times M$, 則 $y-x=2p_rM$, 則 $y=2p_rM+x$, 則 $y=2p_rM+p_r(\frac{x}{p_r})x$, 因爲 $(\frac{x}{p_r})$ 也是整數, 所以 p_r 也是 y 的因數, 便和 x,y 互質矛盾。

所以 a 和 $\frac{y-x}{2}$ 互質。同理 a 和 $\frac{y+x}{2}$ 互質。

所以 $(a,\frac{y-x}{2},\frac{y+x}{2})$ 就能得到一組本原畢氏數。

因此我們得到一個結論:

當 $a=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$, $a^2=\prod_{i=1}^{k}p_i^{2\alpha_i}=x\cdot y$ 時, 將每一個 $p_i^{2\alpha_i}$ 分別完整地投入 x 或投入

y 的分解, 則 (x,y) 互質, 所以當 $k=1$ 時, 有 1 組本原畢氏三元數, 當 $k=2$ 時, 有 2 組本原畢氏三元數, 當 $k=3$ 時, 有 4 組本原畢氏三元數, 當 $k=4$ 時, 應該有 8 組本原畢氏三元數。就是將 x 和 y 看成兩個相同的箱子, 再將 k 個相異的 $p_i^{2\alpha_i}$ 分別投入的所有方法。滿足用排列組合的計算方式:

$$C_0^2+\frac{1}{2}C_1^2=2=2^{2-1},\quad C_0^3+C_1^3=4=2^{3-1},\quad C_0^4+C_1^4+\frac{1}{2}C_2^4=8=2^{4-1},$$
$$C_0^5+C_1^5+C_2^5=16=2^{k-1}\cdots.$$

5. 再分析 a 爲偶數時,

當 a 的 2 的質因數有 $\alpha\geq 2$ 個以上時, 比較 $a=2^2\times 3$ 和 $a=2^3\times 3$ 建構的各組本原畢氏三元數來源:

$12^2=2\times 72=8\times 18$, 而得到 (12, 35, 37) 和 (12, 5, 13);

$24^2=2\times 288=18\times 32$, 而得到 (24, 143, 145) 和 (24, 7, 25)。

爲了確定變因, 我們再觀察 $a=48=2^4\times 3$, 發現也只有 (48, 575, 577) 和 (24, 55, 73) 兩組本原畢氏三元數, 可見本原畢氏三元數的組數和 α 的增加無關, 再觀察:

$a=2^2\times 3\times 5=60$, 發現有 (60, 899, 901)、(60, 221, 299)、(60, 91, 109) 和 (60, 11, 61) 四組本原畢氏三元數。由此看來, 當 a 的 2 的質因數有 2 個以上時, 本原畢氏三元數組數的關鍵, 仍應該在 a 的奇質因數的個數。再由這 4 個本原畢氏三元數的來源分析:

(60, 899, 901) 來自 $3600=2\times 1800=(2)\times(2^3\times 3^2\times 5^2)$,

(60, 221, 229) 來自 $3600=8\times 4500=(2^3)\times(2\times 3^2\times 5^2)$,

(60, 91, 109) 來自 $3600=18\times 200=(2\times 3^2)\times(2^3\times 5^2)$,

(60, 11, 61) 來自 $3600=50\times 72=(2\times 5^2)\times(2^3\times 3^2)$,

仍然是將每一個奇質因數, 分別完整地投入 2 的 1 次方和2的 $(2\alpha-1)$ 次方的一邊, 就能得到一組本原畢氏三元數。若是 a^2 的某個奇質因數 $p_r^{2\alpha_r}$, 被拆成兩部分, 而分到 x、y 兩邊, 則 (x,y) 除了 2 之外還有公因數 p_r, 所以 $(a,\frac{y-x}{2},\frac{y+x}{2})$ 至少有公因數 p_r, 不是本原畢氏三元數。因此當 $k=1$ 時有 2 組本原畢氏三元數, 當 $k=2$ 時有 4 組本原畢氏三元數, 當 $k=3$ 時應該有 8 組本原畢氏三元數。就是將 2 的 1 次方和 2 的 $(2\alpha-1)$ 次方看成兩個不同的箱子, 再將 k 個相異的 $p_i^{2\alpha_i}$ 分別完整地投入這兩個箱子的所有方法。滿足用排列組合的計算方式:

$$C_0^1+C_1^1=2=2^1,\quad C_0^2+C_1^2+C_2^2=4=2^2,\quad C_0^3+C_1^3+C_2^3+C_3^3=8=2^3\cdots,$$

或看成將 k 個相異的 $p_i^{2\alpha_i}$, 分別投入 2 個相異的箱子, 每一個質數有 2 種選擇, 所以有 2^k 種方法。

6. 如果只考慮畢氏三元數的組數, 除了 1、2 是 0 之外, 只需分爲二類:

甲 若 a 是大於 2 的奇數, 則 $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, 將每一個 $p_i^{2\alpha_i}$ 分別投入 a^2 的兩個因數 $A \cdot B$, 令 A 和 B 中較小的爲 x, 較大的爲 y, 則以 a 建構的畢氏三元數的組數有: $\left(\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)-1\right) \div 2$。其中 $(2\alpha_i+1)$ 的加 1, 是因爲每一個 p_i 的次方都有 0 到 $2\alpha_i$ 種選擇, 再扣掉 $A = B$ 的情形有 1 種, 最後的除以 2, 是因爲 A、B 兩邊可以調換, 但其中只有一邊是小的。這個結果和 $\frac{1}{a} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ 的方程式其中 $X < Y$, 有多少組 (X, Y) 的正整數解的個數相同。即每一組 $x \cdot y = a^2$ 對應的畢氏三元組氏 $(a, \frac{y-x}{2}, \frac{y+x}{2})$; 對應 $\frac{1}{a} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ 的解是 $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+y}$。(註一)

乙 若 a 是偶數, 則 $a = 2^{\alpha} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, 其中 $\alpha \geq 1$, p_i 是奇質因數。因爲 $(c-b)$ 和 $(c+b)$ 兩數都必須是偶數, 所以 x 和 y 必須各先分到一個 2。除了 2 的次方有 1 到 $(2\alpha-1)$ 種選擇, 其餘奇質數如上述甲的討論, 得到以 a 建構的畢氏三元數的組數有: $\left((2\alpha-1)\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)-1\right) \div 2$。或看成 $\frac{2}{a} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ 的方程式, 即 $\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ 其中 $X < Y$, 有多少組 (X, Y) 的正整數解的個數相同, 亦即 $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = x \cdot y$ 有多少種方法。所以 $a = 60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ 的畢氏三元數有 $(3 \times 3 \times 3 - 1) \div 2 = 13$ 組。

五、總結與各項紀錄

對任意正整數 a, 將 a^2 分解成兩個同奇偶的因數 $x \cdot y$ $(x < y)$, 則每一組 (x, y) 都可以建構出一組 $(a, \frac{y-x}{2}, \frac{y+x}{2})$ 畢氏三元數。再應用以上 6 點分析和歸納的結果, 可以預知並求出有幾組本原畢氏三元數。

這 6 個要點是:

1. a 爲奇質數, 或單一奇質數的 α 次方, 本原畢氏三元數只有一組 $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2})$。
2. 當 $a = 2^k$, 恰能建構 $(k-1)$ 組畢氏三元數。此結論連 $k = 1$ 都適用, 且 $k > 1$ 時, 必只有一組本原畢氏三元數 $(2^k, 2^{2k-2}-1, 2^{2k-2}+1)$。
3. 若 a 的質因數分解中 2 的冪次爲 1, 則 (a, b, c) 建構的畢氏三元數都不是本原畢氏三元數。
4. 當 a 的質因數只是幾個 (≥ 2) 奇質數, 在 $a^2 = x \cdot y$ 的分解中, 如果有任何同一個奇質數的 2α 次方被拆成兩項, 分別投入 x 和投入 y, 則這一組 x, y 無法建構本原畢氏三元數; 如果每一個奇質數的 2α 次方, 都完整地投入 x 或投入 y, 則這一組 x, y 一定能建構本原畢氏三元數。如果 k是偶數, 則 a 能建構的本原畢氏三元數有 $C_0^k + C_1^k + C_2^k + \cdots + \frac{1}{2}C_{\frac{k}{2}}^k$ 組, 最後一項的 $\frac{1}{2}$ 是因爲恰好一半, 兩邊可以調換; 如果 k 是奇數, 則 a 能建構的本原畢氏三元數有 $C_0^k + C_1^k + C_2^k + \cdots + C_{\frac{k-1}{2}}^k$ 組。這個公式甚至可以適用總結 1 的結果, 當 $k = 1$ 時, $C_{\frac{1-1}{2}}^1 = C_0^1 = 1$。

5. 當 a 的 2 冪次 ≥ 2, 能建構的本原畢氏三元數的組數與 α 無關, 而與 a 的奇質數因數的個數 k 有關, 且 a 能建構的本原畢氏三元數有 $C_0^k + C_1^k + C_2^k + \cdots + C_k^k = 2^k$ 組。這個公式也可以適用總結 2 的結果, 即 $k = 0$ 時, $C_0^0 = 1$。
6. 若 a 是大於 2 的奇數, 則以 a 建構的畢氏三元數的組數有
$$\Big(\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)-1\Big)\div 2.$$
若 a 是偶數, 則以 a 建構的畢氏三元數的組數有:
$$\Big((2\alpha-1)\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)-1\Big)\div 2.$$
7. 除了 1 和 2, 因爲太小無法建構畢氏三元數之外, 由 a 的標準質因數分解, 可以得到下列第一的紀錄:

3 <=> 第一個由奇質數建構的本原畢氏三元數。

4 <=> 第一個由偶數建構的本原畢氏三元數。

6 <=> 第一個無法建構的本原畢氏三元數的合數。

12 <=> 第一個能建構 2 組本原畢氏三元數的偶數。

15 <=> 第一個能建構 2 組本原畢氏三元數的奇數。

60 <=> 第一個能建構 4 組本原畢氏三元數的偶數。

105 <=> 第一個能建構 4 組本原畢氏三元數的奇數。

420 <=> 第一個能建構 8 組本原畢氏三元數的偶數。

1155 <=> 第一個能建構 8 組本原畢氏三元數的奇數。

$\vdots$

所以沒有正整數恰能建構 3、5、6、7、9、10、11組 $\cdots$ 等非總結 4 和總結 5 兩個組和公式結果的本原畢氏三元數。即若 a 能建構本原畢氏三元數則一定是 2^k 組, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$。
8. 從 $a = 3$ 得到 (3, 4, 5), 從 4 得到 (4, 3, 5); 從 $a = 5$ 得到 (5, 12, 13), 從 12 得到 (12, 5, 13); 從 $a = 8$ 得到 (8, 15, 17), 從 15 得到 (15, 8, 17); 從 11 得到 (11, 60, 61) 從 60 得到 (60, 11, 61); 本研究可以自我反覆驗算, 出錯的機會會相對的減少。
9. 最後以 $a = 2025$ 爲例, 總結兩個問題:

因爲 $(2025)^2 = 3^8 \times 5^4$, 所以以 2025 爲一股的畢氏三元數有 $\frac{(8+1)(4+1)-1}{2} = 22$ 組; 且奇質數的個數只有 2 個, $2^{2-1} = 2$, 所以只有 $(2025, \frac{3^8\times5^4-1}{2}, \frac{3^8\times5^4+1}{2}) = (2025, 2050312, 2050313)$ 及 $(2025, \frac{3^8-5^4}{2}, \frac{3^8+5^4}{2}) = (2025, 2968, 3593)$ 是本原畢氏三元數。

六、心得

隨著 a 變大, 要求出以 a 爲一股的所有畢氏三元數, 不是不可能, 只可能覺得毫無意義。雖然 x、y 同奇偶的條件, 大大的限制了 $a^2 = x \cdot y$ 分解的變化, 但仍是一件浩大的工程。如果只針對以 a 爲一股的所有本原畢氏三元數, 不僅目標清晰, 且有以上歸納的 6 個要點, 不僅處理時有明確的步驟, 也簡化許多計算的工程, 更理論性的預知本原畢氏三元數的組數, 能避免遺漏和被非本原畢氏三元數魚目混珠的錯誤。或許有人要問, 如果從指定的斜邊 c 開始研究會如何? 根據本原畢氏三元數的性質, 斜邊 c 有很多條件的限制, 且都是必要非充分條件。例如 c 一定要屬於 $4k+1$ 型的奇數, 起步就處處受限, 且 a^2+b^2 無法因數分解, 一定比指定一股來得困難, 但相關文獻已有解法, 就此打住。惟在本研究過程中偶然發現, (16, 63, 65) 和 (33, 56, 65) 兩組本原畢氏三元數有相同的 c, 認爲應該是能建構 2 組本原畢氏三元數最小 c 了, 用 ChatGPT 查詢, 果然正確, 算是本研究的意外收穫了!

註一: 這個性質的發現要感謝審稿老師的提示, 讓我想起35年前, 因爲指導學生科展, 研究 $\frac{1}{60} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有多少組正整數解的問題, 發現關鍵在 60 的平方有多少個正因數。科展得獎後寫了一篇『有必要定義二次因子嗎?』的心得, 刊在數學傳播 79 年 6 月第 14 卷第二期。到現在即將邁入古稀之年, 才再次知道另一個數學的大問題可用二次因數來解題, 心裡真的有點激動, 真正印證了活到老學到老的古訓。

參考資料

1. Calvin. T. Long 著, 張國財譯。數論導論。幼獅文化事業公司出版。

—本文作者高雄市中正高中退休教師—